

RISCRITTURA DELLE EQUAZIONI DEL METODO DELL'INVASO PER CURVE DI POSSIBILITA' PLUVIOMETRICA A TRE PARAMETRI

ing. Martino Cerni

1. Premessa

Con queste note si intende presentare la generalizzazione per le curve di possibilità pluviometrica a tre parametri delle equazioni risolutive del metodo dell'invaso, secondo la classica formulazione proposta da Umberto Puppini (1923)¹. Infatti nei manuali di costruzioni idrauliche, o più in generale nei testi che trattano di idraulica, il metodo dell'invaso è quasi sempre proposto supponendo che il legame tra l'altezza di pioggia h (mm) e la sua durata τ abbia la seguente forma:

$$h = a \tau^n \quad [1]$$

dove a e n sono i due parametri della curva di possibilità pluviometrica ricavati in base allo studio statistico dei dati di pioggia misurati.

Nelle riflessioni che seguono si utilizzerà invece una curva di possibilità pluviometrica a tre parametri così espressa:

$$h = \frac{a \tau}{(b + \tau)^c} \quad [2]$$

Sarà inoltre illustrato l'uso di un semplice foglio di calcolo Excel per la stima del volume di invaso da reperire al fine di assicurare l'*invarianza idraulica* (ex DGRV 10 maggio 2006 n.1322 e ss.mm.ii.). Il modello di calcolo, come le tabelle e i grafici allegati a scopo esemplificativo, fanno propri i risultati dello studio "Analisi regionalizzata delle precipitazioni per l'individuazione di curve segnalatrici di possibilità pluviometrica di riferimento" commissionato dal Commissario Delegato per l'emergenza idraulica conseguente l'evento del 26 settembre 2007 (OPCM n. 3621 del 18/10/2007) alla società Nordest Ingegneria S.r.l.. A tale studio, scaricabile facendone richiesta dal sito www.commissarioallagamenti.veneto.it, si rimanda per ogni dubbio o chiarimento.

La presentazione del metodo dell'invaso, delle sue peculiarità e dei suoi limiti sarà ridotta al minimo se non addirittura tralasciata: in letteratura sono disponibili trattazioni di ben più ampio respiro e con maggiore approfondimento didattico; l'intento di queste pagine è unicamente quello di presentare uno strumento (le equazioni, le tabelle e il semplice programma) facilmente utilizzabile dal professionista, senza però tralasciare le indicazioni essenziali per la sua comprensione e per il suo corretto impiego.

¹ Puppini, U. *Il calcolo dei canali di bonifica*, Il Monitore Tecnico, N. 5-6-7, Milano, 1923. Lo studio estende ai canali di bonifica le intuizioni del Paladini (1902) e del Fantoli (1904) relative al calcolo della portata della fognatura di Milano. Successivamente al Puppini altri insigni idraulici, come Supino, Massari, Del Pra, Ongaro ..., hanno perfezionato l'espressione del coefficiente udometrico del metodo dell'invaso.

In questa sede, quindi, ci limiteremo a ricordare le ipotesi di base e a ricalcare *mutatis mutandis* i passaggi logico-matematici esposti con estrema chiarezza nel manuale di “Fognature” (Edizioni Libreria Cortina, Padova, 1997) dei professori Da Deppo e Datei (presso l'Università degli Studi di Padova), a cui si rimanda anche per la descrizione delle variabili involontariamente introdotte senza l'opportuna definizione.

2. Il metodo dell'invaso

Il metodo dell'invaso mette in evidenza l'effetto esercitato dalla geometria della rete e dagli invasi distribuiti nel bacino nella formazione della portata di piena, in particolare la loro funzione “regolatrice e limitatrice” dei deflussi.

L'idea alla base del metodo trae origine dall'osservazione della realtà fisica nella quale, al verificarsi di una pioggia, contemporaneamente al deflusso da una generica sezione della rete, vi è il riempimento della rete sottesa dalla sezione stessa. Questa palese considerazione, che traduce l'evidenza che nessun deflusso potrebbe verificarsi da una sezione se nella rete a monte non si immagazzinasse un adeguato volume d'acqua responsabile del carico idraulico necessario per il moto, esprime il principio di continuità (conservazione della massa) per le reti idrauliche.

In altri termini, in ogni istante deve essere verificato il bilancio dei volumi nella rete sottesa da una generica sezione, per cui il volume d'acqua che, in un generico intervallo di tempo, affluisce dal suolo alla rete è pari al volume che, nello stesso intervallo di tempo, defluisce dalla sezione e all'incremento del volume invasato, nello stesso tempo, nella rete a monte della sezione considerata. Riassumendo con la chiarezza e l'univocità del linguaggio matematico ciò equivale a porre:

$$p dt = Q dt + dV \quad [3]$$

dove:

- $p(t)$ rappresenta la portata affluente alla rete all'istante t (“pioggia netta”), che può esser esplicitata così:

$$p = \varphi j S$$

essendo: φ è il coefficiente d'afflusso, j l'intensità della pioggia e S è la superficie scolante.

- $Q(t)$ indica la portata che defluisce attraverso la sezione di chiusura del bacino S e dipende dal volume invasato $V(t)$;
- dV è la variazione del volume invasato (o svasato) a monte della sezione nell'intervallo temporale dt .

Assieme all'equazione di continuità [3], l'altro cardine teorico su cui si basa il metodo dell'invaso, come ogni altro modello idraulico "deterministico" seppur di genesi "concettuale", è rappresentato dall'equazione del moto²:

$$\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} - i_f + \frac{v^2}{K_S^2 R_H^{4/3}} = 0 \quad [4]$$

essendo:

- y il tirante d'acqua;
- s l'ascissa;
- v la velocità media;
- K_S il coefficiente di scabrezza secondo Gauckler-Strickler;
- R_H il raggio idraulico;
- i_f la pendenza del fondo;
- g l'accelerazione di gravità.

Il metodo dell'invaso assume una formulazione assai semplificata per l'equazione del moto: sono infatti ignorati i termini convettivi e inerziale ritenuti trascurabili rispetto agli ultimi due. Si suppone quindi che il fenomeno sia a lenta evoluzione rispetto al tempo e allo spazio, così da poter essere approssimato da una successione di stati di moto uniforme. La [4] diventa allora:

$$v = K_S R_H^{2/3} \sqrt{i_f}$$

oppure:

$$Q = v A = A K_S R_H^{2/3} \sqrt{i_f} = A K_S (A/P)^{2/3} \sqrt{i_f} = c A^\alpha \quad [5]$$

avendo indicato con A l'area della sezione liquida ("area bagnata"), con P il perimetro bagnato della sezione e con α l'esponente della scala delle portate (tipicamente $\alpha = 1.5$ per sezioni aperte e $\alpha = 1.0$ per sezioni chiuse).

Riassumendo, il metodo dell'invaso semplifica l'equazione del moto, che a rigore dovrebbe essere trattato come vario, riducendola a quella del moto uniforme [5] mentre l'equazione di continuità è espressa tramite l'equazione dei serbatoi [3].

A questi due presupposti poi si aggiungono le altre ipotesi operative e semplificative che sono:

- *funzionamento autonomo* della rete idraulica: il deflusso tra i singoli tronchi della rete come pure dalla rete al recipiente (recapito finale) non è influenzato dai livelli idrometrici a valle, non c'è alcun vincolo

² In idraulica, il moto delle correnti unidimensionali (come nel caso in esame) è governato dal sistema di equazioni del De Saint Venant (1871), costituito dall'equazione dinamica, ricavabile dal principio di conservazione dell'energia o dal principio di conservazione della quantità di moto (II^a legge della Meccanica), e dall'equazione di continuità o conservazione della massa.

di interruzione o di limitazione della portata e ogni elemento della rete non può esser rigurgitato dall'elemento ricevente;

- *funzionamento sincrono* della rete: durante la piena, tutti gli elementi della rete raggiungono contemporaneamente lo stesso stato idraulico;
- *moto uniforme*: come già illustrato ciò significa ipotizzare che il pelo libero nella rete trasli parallelamente al fondo e quindi, in ragione della sincronia di funzionamento, che possa esser istituito, seppur con molte riserve, un legame lineare tra l'area A della sezione liquida e il volume invasato V .
- *rete inizialmente vuota*: questa ipotesi è frequentemente verificata in reti fognarie mentre trova pochi riscontri per quanto concerne le reti di bonifica e i corsi d'acqua naturali;
- *pioggia di intensità costante*.

Alla luce di queste ipotesi, il metodo dell'invaso si propone di fornire l'espressione della portata di picco, ovvero del corrispondente coefficiente udometrico, che defluisce attraverso ogni arbitraria sezione di chiusura. Si tratta quindi di integrare la [3], opportunamente completata dalla [5], e verificare se per una data pioggia, di durata e intensità note, il bacino sia in grado di invasare l'acqua affluita, sempre ipotizzando che l'afflusso alla rete cominci all'inizio della pioggia e termini nell'istante esatto in cui ha fine la precipitazione.

Assumendo quindi, come imposto dal moto uniforme, che il volume V sia linearmente legato all'area A della sezione liquida, posti A_0 e V_0 rispettivamente la massima area ed il massimo volume si ha:

$$\frac{V}{V_0} = \frac{A}{A_0} \quad [6]$$

Dalla [5], se si indica con Q_0 la portata massima che il canale può condurre, si ha

$$Q_0 = cA_0^\alpha$$

ossia:

$$\frac{Q}{Q_0} = \left(\frac{A}{A_0}\right)^\alpha$$

Sostituendo, grazie alla [6], il rapporto tra le aree A/A_0 con quello tra i volumi V/V_0 si ottiene:

$$\frac{Q}{Q_0} = \left(\frac{V}{V_0}\right)^\alpha$$

ed esplicitando il volume:

$$V = V_0 \left(\frac{Q}{Q_0}\right)^{1/\alpha} \quad [7]$$

Pertanto essendo per la [7]:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dQ} \frac{dQ}{dt}$$

l'equazione di continuità [3] diviene:

$$p - Q = \frac{V_0}{\alpha} \frac{Q^{(1-\alpha)/\alpha}}{Q_0^{1/\alpha}} \frac{dQ}{dt}$$

che corrisponde a:

$$dt = \frac{V_0}{\alpha} \frac{Q^{(1-\alpha)/\alpha}}{Q_0^{1/\alpha}} \frac{dQ}{p - Q} \quad [8]$$

Indicato poi con z il rapporto istantaneo tra la portata Q e la pioggia netta p :

$$z = \frac{Q}{p} \quad \text{e quindi} \quad Q = p \cdot z \quad \text{e} \quad dQ = p \, dz$$

si può eliminare il termine Q dall'equazione ottenendo:

$$dt = \frac{V_0}{\alpha} \frac{p^{(1-\alpha)/\alpha}}{Q_0^{1/\alpha}} \cdot \frac{z^{(1-\alpha)/\alpha}}{1-z} dz \quad [9]$$

Integrando la [9] tra $t=0$ e $t=t_r$ (tempo di riempimento) ovvero tra $z=0$ (ossia $Q=0$, istante iniziale) e $z=Q/p$ si ha³:

$$\int_0^{t_r} dt = \frac{V_0}{\alpha} \frac{p^{(1-\alpha)/\alpha}}{Q_0^{1/\alpha}} \int_0^{z} \frac{z^{(1-\alpha)/\alpha}}{1-z} dz \quad \longrightarrow \quad t_r = \frac{V_0}{Q_0^{1/\alpha}} \frac{p^{(1-\alpha)/\alpha}}{p} z^{1/\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k \alpha + 1} \quad [10]$$

Indicando:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k \alpha + 1} = \xi_{\alpha}(z)$$

si giunge all'espressione del tempo di riempimento:

$$t_r = \frac{V_0}{Q_0^{1/\alpha}} \frac{p^{(1-\alpha)/\alpha}}{p} z^{1/\alpha} \xi_{\alpha}(z) = \frac{V_0}{p} \xi_{\alpha}(z) \quad [11]$$

Ricordando ora che la "pioggia netta" p ossia la portata che affluisce alla rete ha la seguente espressione:

$$p = \varphi \, j \, S$$

³ L'integrale a secondo membro della [10] si semplifica grazie alla sostituzione:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \quad \longrightarrow \quad \int \frac{z^{(1-\alpha)/\alpha}}{1-z} dz = \int \sum_{k=0}^{\infty} z^k z^{(1-\alpha)/\alpha} dz$$

La posizione è lecita perché esiste la somma serie: infatti durante la crescita dell'onda di piena la serie è uniformemente convergente essendo $z < 1$.

e che, in base alla curva di possibilità pluviometrica [2] e per le ipotesi assunte, l'intensità di pioggia⁴ è data da:

$$j = \frac{h}{\tau} = \frac{a}{(b + \tau)^c}$$

è possibile esplicitare l'espressione della durata τ della pioggia come segue.

$$\tau = \left(\frac{a}{j} \right)^{\frac{1}{c}} - b$$

$$\tau = \left(\frac{a \varphi S}{p} \right)^{\frac{1}{c}} - b$$

Infine utilizzando l'espressione di z si ottiene:

$$\tau = \left(\frac{a \varphi z S}{Q} \right)^{\frac{1}{c}} - b \quad [12]$$

Si eguaglia ora l'espressione del tempo di riempimento [11] con quella del tempo di pioggia [12] $t_r = \tau$, così da poter porre $Q = Q_0$ e quindi esplicitare l'espressione della portata di picco.

$$t_r = \tau \quad \longrightarrow \quad \frac{V_0}{p} \xi_\alpha(z) = \left(\frac{a \varphi z S}{Q_0} \right)^{\frac{1}{c}} - b \quad [13]$$

Con semplici passaggi matematici dalla [13]:

$$\left(\frac{V_0}{p} \xi_\alpha(z) + b \right)^c = \frac{a \varphi z S}{Q_0}$$

si esplicita Q_0 :

$$Q_0 = \frac{a \varphi z S}{\left(\frac{V_0}{p} \xi_\alpha(z) + b \right)^c} \quad [14]$$

Dalla [14] tenuto conto della posizione $z = Q/p$ ossia $p = Q/z$ si ricava l'espressione del coefficiente idrometrico:

⁴ A rigore infatti l'espressione riportata rappresenta l'intensità media di una pioggia di durata τ .

$$u = \frac{Q_0}{S} = \frac{a \varphi z}{\left(\frac{v_0}{u} z \xi_\alpha(z) + b \right)^c}$$

Dove $v_0 = V_0/S$ è il volume specifico invasato; riordinando ulteriormente l'espressione precedente si ha:

$$u = \left(v_0 z \xi_\alpha(z) + b u \right)^{\frac{c}{c-1}} \left(a \varphi z \right)^{\frac{1}{1-c}} \quad [15]$$

La [15] permette di calcolare il coefficiente udometrico assegnate le caratteristiche pluviometriche dall'area (coefficienti a , b e c) e le caratteristiche idrologiche e geometriche del bacino e della sua rete (φ e v_0); resta unicamente da definire il valore di z . La soluzione della [15] va ricercata, in modo iterativo essendo l'espressione implicita, scegliendo il valore di z che rende massimo il coefficiente udometrico u .

Per determinare il valore di z (dipendente da j) che rende massimo il coefficiente udometrico si procede ponendo la condizione $du/dz=0$ (z infatti è l'unica variabile). La condizione di massimo per il coefficiente udometrico può essere facilmente individuata numericamente, per esempio con il metodo della secante (*Regula Falsi*).

La [15] ovviamente rappresenta una generalizzazione della formula del coefficiente udometrico secondo il metodo dell'invaso calcolato a partire dalla curva di possibilità pluviometrica a due parametri [1]. Infatti assumendo $b=0$ e $c=1-n$ e quindi:

$$h = \frac{a \tau}{(b + \tau)^c} \quad \longrightarrow \quad h = \frac{a \tau}{\tau^{1-n}} = a \tau^n$$

si ha dalla [15]:

$$u = \left(v_0 z \xi_\alpha(z) \right)^{\frac{1-n}{n}} \left(a \varphi z \right)^{\frac{1}{n}} = z \left(v_0 \xi_\alpha(z) \right)^{\frac{n-1}{n}} \left(a \varphi \right)^{\frac{1}{n}}$$

che è l'usuale espressione reperibile in letteratura (Da Deppo e Datei, 1997).

3.1 Applicazione del metodo dell'invaso: calcolo dei volumi da reperire ai fini dell'invarianza idraulica

Si sfrutta ora la teoria dell'invaso per stimare i volumi da reperire per assicurare l'invarianza idraulica (in termini di portata massima scaricata) di un qualsiasi intervento sul territorio.

Per far questo si utilizzerà il metodo dell'invaso secondo uno schema logico "inverso" rispetto a quello sopra presentato e alle consuete applicazioni idrologiche.

Infatti, nella prassi quotidiana, il metodo dell'invaso è impiegato per stimare la portata di picco generata da un bacino con assegnate caratteristiche geometriche e idrologiche: è noto quindi da principio, assieme ad altri parametri, il volume di invaso disponibile. Nel calcolo dell'invarianza idraulica invece è nota a priori la portata massima che si vuole scaricare (imposta dalle condizioni *ante operam* del bacino) mentre il volume di invaso è l'incognita da determinare.

Esplicitando dalla [15] il volume di invaso specifico si ha:

$$v_0 = \frac{u^{\frac{c-1}{c}} (a \varphi z)^{\frac{1}{c}} - b u}{z \xi_\alpha(z)} \quad [16]$$

Assegnati i parametri della curva di possibilità pluviometrica (a , b e c), il grado di impermeabilizzazione del terreno (φ), la [16]⁵ consente di stimare il volume di invaso specifico necessario perché il sistema scarichi al massimo la portata corrispondente al coefficiente udometrico imposto u .

3.2 Utilizzo del foglio di calcolo Excel

Nel semplice programma di verifica allegato è implementato il metodo sopra illustrato. I dati in input da inserire a cura dell'Utilizzatore sono:

- il Comune all'interno del cui territorio ricade l'ambito in studio (menù a tendina);
- il tempo di ritorno (TR) con il quale svolgere le elaborazioni, tipicamente 50 anni (menù a tendina);
- la superficie S dell'ambito (m^2);
- il coefficiente di afflusso medio φ caratteristico dell'ambito;
- il valore dell'esponente α della scala delle portate;
- il coefficiente udometrico u imposto allo scarico (tipicamente 10 l/s,ha).

Il programma a questo punto ha tutti gli elementi per trovare la soluzione: i risultati restituiti (oltre alla ripetizione di dati in input del Comune e del tempo di ritorno) sono:

- i parametri a , b e c della curva di possibilità pluviometrica assieme alla denominazione della zona pluviometrica all'interno della quale ricade il Comune selezionato;
- il volume di invaso specifico (m^3/ha);
- il volume di invaso necessario (m^3).

3.3 Esempio numerico

A titolo esplicativo si presenta un esempio dell'impiego del foglio elettronico.

Sia da calcolare il volume necessario per garantire l'invarianza idraulica per un'area di 7000 m^2 , mediamente impermeabilizzata (coefficiente d'afflusso $\varphi = 0.6$) situata nel Comune di Venezia.

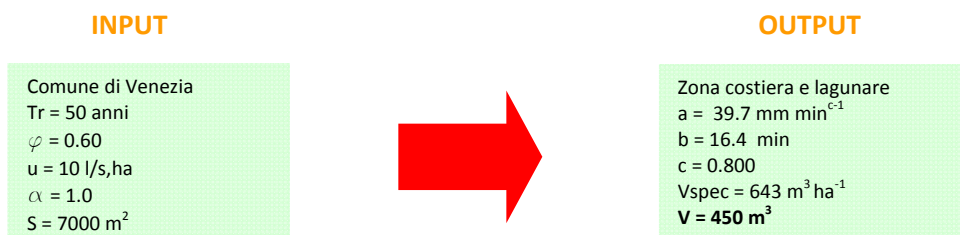
⁵ Come per l'espressione del coefficiente udometrico [15] anche in questo caso bisogna ricercare numericamente il valore di z che massimizza u , anche se con minor complicazioni essendo questa volta la formula [16] esplicita.

La portata massima ammessa allo scarico è di 7 l/s corrispondente ad un coefficiente udometrico di 10 l/s, ha. Il tempo di ritorno richiesto è 50 anni. Si supponga di invasare il volume all'interno delle condotte di raccolta e scarico delle acque meteoriche.

Selezionati il Comune (Venezia) e il tempo di ritorno (50 anni) tramite i corrispondenti menù a tendina e inseriti i valori del coefficiente d'afflusso ($\varphi = 0.6$), del coefficiente udometrico imposto allo scarico (10 l/s,ha), dell'esponente della scala delle portate ($\alpha = 1.0$) e della superficie (7000 m²) il programma restituisce il seguente risultato:

- ripete il Comune (Venezia) e il tempo di ritorno (50 anni) impostati;
- individua, tra le quattro macroaree omogenee dal punto di vista pluviometrico nelle quali è stato suddiviso il territorio oggetto dell'analisi regionalizzata, quella alla quale appartiene il Comune (ZONA COSTIERA E LAGUNARE);
- seleziona i parametri a (39.7 mm min⁻¹), b (16.4 min) e c (0.800) della curva di possibilità pluviometrica;
- calcola i valori del volume specifico (643 m³ ha⁻¹) e del volume d'invaso da reperire (450 m³).

Concludendo, per garantire il rispetto dell'invarianza idraulica in questo caso il progettista dovrà reperire almeno 450 m³ di volume di invaso.



Infine si dimostra come lo stesso risultato possa esser ottenuto mediante l'uso di semplici abachi e tabelle, riportati nelle pagine seguenti.

Post scriptum: A seconda del livello di "protezione Macro" impostato in Excel, i programmi potrebbero richiedere di abilitare l'esecuzione delle macro.

4. Bibliografia

Da Deppo, L. e Datei, C. *Fognature*, Edizioni Libreria Cortina, Padova, 1997.

Fiume, A. *Analisi regionalizzata delle precipitazioni per l'individuazione di curve segnalatrici di possibilità pluviometrica di riferimento*, Commissario Delegato per l'Emergenza concernente gli eccezionali eventi meteorologici del 26 settembre 2007 che hanno colpito parte del territorio della Regione Veneto. OPCM n. 3621 del 18/10/2007, Venezia, 2009.

Zona costiera e lagunare - Tr = 50 anni			Comuni: Campagna Lupia, Campolongo Maggiore, Camponogara, Casale sul Sile, Casier, Cavallino-Treporti, Chioggia, Dolo, Fiesso d'Artico, Fosso', Marcon, Mira, Mirano, Mogliano Veneto, Pianiga, Quarto d'Altino, Spinea, Stra, Venezia.
a	39.7	[mm min ^{0.1}]	
b	16.4	[min]	
c	0.8	[-]	
Esponente della scala delle portate α		1	

VOLUME DI INVASO SPECIFICO [m ³ /ha] NECESSARIO PER OTTENERE L'INVARIANZA IDRAULICA - METODO DELL'INVASO												
φ	Coefficiente udometrico imposto allo scarico [l/s,ha]											
	2	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	
0.1	102	75	55	43	34	28	22	18	14	10	8	
0.15	171	130	100	82	70	60	51	45	39	33	29	
0.2	247	190	150	126	110	97	86	77	69	62	55	
0.25	328	254	203	174	153	137	124	112	103	94	86	
0.3	413	322	259	224	200	180	165	151	139	129	119	
0.35	502	392	318	277	248	226	208	192	178	166	155	
0.4	594	465	380	332	299	274	253	235	219	206	193	
0.45	689	541	443	389	352	323	299	280	262	247	233	
0.5	787	618	508	448	406	374	348	326	307	289	274	
0.55	887	698	575	508	462	426	398	373	352	334	317	
0.6	989	779	643	569	519	480	449	422	399	379	361	
0.65	1 094	862	713	632	577	535	501	472	448	426	406	
0.7	1 200	947	784	697	637	591	555	524	497	473	452	
0.75	1 309	1 033	857	762	697	649	609	576	547	522	499	
0.8	1 419	1 121	930	828	759	707	665	629	598	571	547	
0.85	1 531	1 210	1 005	896	822	766	721	683	651	622	596	
0.9	1 645	1 300	1 081	965	886	826	778	738	704	673	646	
0.95	1 760	1 392	1 158	1 034	950	887	836	794	757	725	697	
1	1 877	1 485	1 236	1 105	1 016	949	895	851	812	778	748	

Volumi di invaso necessari per ottenere l'invarianza idraulica - Metodo dell'invaso

Valori espressi in funzione del coefficiente di afflusso φ e del coefficiente udometrico imposto u allo scarico

Zona costiera lagunare - $Tr = 50$ anni (CPP a 3 parametri) - Sezioni chiuse

